# MPSI 2024/2025 | DS n°8 (4h)

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**La calculatrice est autorisée**

Consignes à suivre :

- Numéroter les pages. Numéroter les questions (inutile d'écrire les titres).
- Soigner la rédaction & soigner la présentation : aérer la copie, encadrer ou souligner les résultats.
- Lire rapidement l'ensemble du sujet en début d'épreuve : les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Pour un exercice donné, traiter et rendre les questions dans l'ordre.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne sera pas prise en compte.

## I - Pendule pas si simple

### I.1 - Position du problème

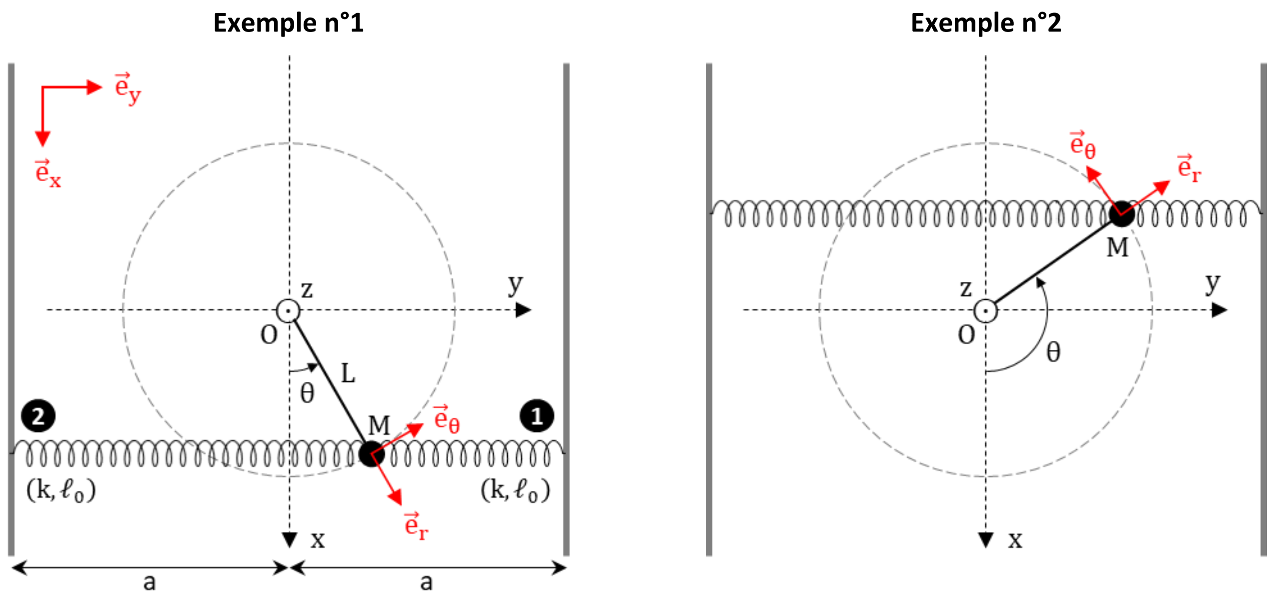
On considère une barre rigide sans masse et de longueur $L$ au bout de laquelle est attaché un point matériel M de masse $m$. Il s'agit donc d'un pendule simple rigide.

Le point matériel est connecté à deux ressorts (notés ❶ et ❷) sans masse, de longueur à vide $\ell_0$ et de constante de raideur $k$. Les ressorts sont connectés à des glissières verticales parfaitement graissées (il n'y a pas de frottement). Les ressorts peuvent ainsi suivre verticalement le point M, en restant toujours à l'horizontal.

On note $2a$ la distance entre les deux glissières et $\theta$ l'angle entre la verticale et la barre. L'angle $\theta$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$, mais compte tenu de la symétrie du problème, l'étude pourra être conduite uniquement pour $\theta \in \,]-\pi\,,\;\pi]$.

On note $\omega = d\theta/dt$ la vitesse angulaire du pendule.

**Présentation du système d'étude**




1) Donner l'expression de la position, de la vitesse et de l'accélération de M en coordonnées polaires.

2) Exprimer les vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ en fonction $\theta$, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

Pour la suite, on introduit la constante positive $\beta$ défini par : $\beta = \frac{mg}{2kL}$

## I.2 - Bilan des forces

3) Donner l'expression de chacune des forces dans la base polaire, en fonction de $m$, $g$, $L$, $k$, $\ell_0$, $a$, $\theta$ et $T$ (la norme de la tension de la tige).

4) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{m}[\cos(\theta) + \beta]\sin(\theta) = 0$$

5) À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe 4 positions d'équilibre. Préciser, lorsque cela est nécessaire, les conditions d'existence de ces positions.

## I.3 - Résolution numérique

On choisit les conditions initiales suivantes : $\theta(0) = 90\,°$ et $\omega(0) = 0\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

6) On définit la liste Python : $\mathrm{Y} = [\theta, \omega]$. Compléter le programme ci-contre (ligne 18 et fonction ligne 15) afin de résoudre numériquement l'équation différentielle du mouvement à l'aide de la fonction « odeint ».

```
1  import numpy as np
2  from scipy.integrate import odeint
3  
4  k = 10
6  m = 1
7  L = 0.1
8  g = 9.81
9  β = m*g/(2*k*L)
10 
11 N = 10000
12 t = np.linspace(0, 2, N)
13 
14 def derivee(Y, t):
15     # à compléter
16 
17 CI = # à compléter
18 sol = odeint(derivee, CI, t)
```

## I.4 - Étude énergétique

7) Parmi les 4 forces mises en jeu, une seule n'est pas conservative, laquelle ? Que vaut sa puissance ?

Toutes les constantes d'intégrations des énergies potentielles seront choisies nulle.

8) Donner l'expression de l'énergie potentielle associée à chacune des forces conservatives en fonction de $\theta$ et des constantes du problème.

Dans la suite, l'énergie potentielle totale sera notée $\mathcal{E}_p^{\mathrm{tot}}(\theta)$.

9) À l'aide du théorème de la puissance mécanique, retrouver l'expression de l'équation du mouvement.

10) Montrer que :

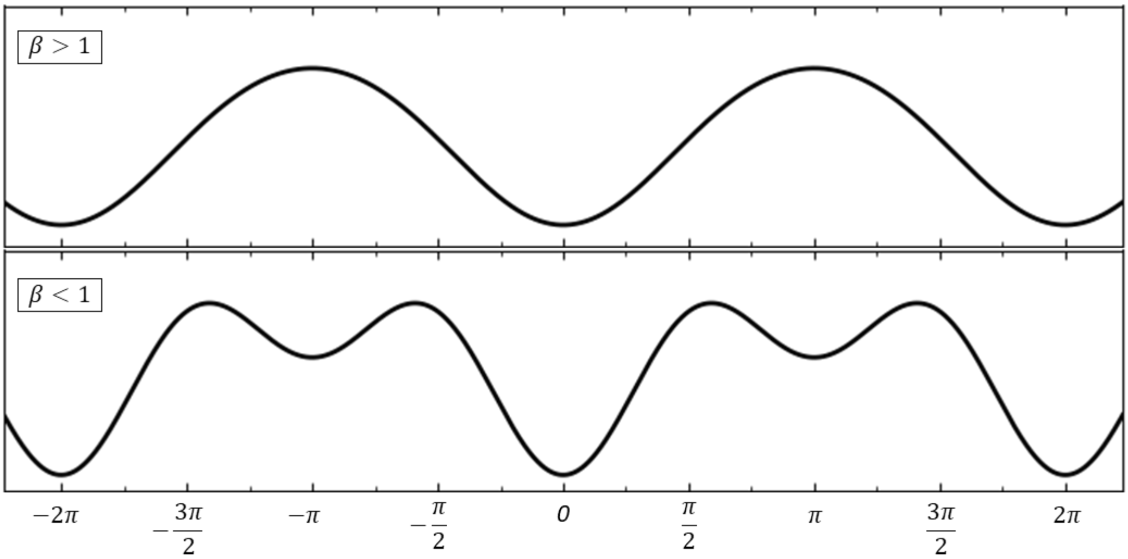
$$\frac{d\mathcal{E}_p^{\mathrm{tot}}}{d\theta} = 2kL^2[\cos(\theta) + \beta]\sin(\theta)$$

11) À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe 4 positions d'équilibre et déterminer leur stabilité.

On donne ci-dessous le profil énergétique $\mathcal{E}_p^{\mathrm{tot}}(\theta)$ dans les cas où $\beta > 1$ et $\beta < 1$.

12) Recopier l'allure des courbes sur votre copie. Repérer sur chaque graphique les positions d'équilibre et préciser, en justifiant, leur stabilité.

Tracé de $\mathcal{E}_p(\theta)$ dans les cas où $\beta > 1$ et $\beta < 1$




## I.5 - Étude du système au voisinage des positions d'équilibre

Dans cette partie, nous allons déterminer la nature du mouvement proche des positions d'équilibre $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$. On note $\theta(t) = \theta_{eq} + \varepsilon(t)$, où $\theta_{eq}$ est une position d'équilibre et $\varepsilon \ll 1$ rad, un infiniment petit d'ordre 1.

On rappelle la formule de Taylor à l'ordre 1 pour toute fonction $f$ :

$$f(\theta_{eq} + \varepsilon) \simeq f(\theta_{eq}) + \varepsilon\, f'(\theta_{eq})$$

### Étude de l'équilibre $\boldsymbol{\theta_{eq} = 0}$

13) Faire un développement limité à l'ordre 1 de l'équation différentielle du mouvement autour de $\theta_{eq} = 0$. Mettre l'équation sous la forme : $\boxed{\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\, \varepsilon = 0}$, où $\omega_0$ est une constante que l'on exprimera en fonction de $k$, $m$ et $\beta$.

14) Quelle équation différentielle reconnait-on ? Donner la forme générale de la solution.

### Étude de l'équilibre $\boldsymbol{\theta_{eq} = \pi}$

15) Faire un développement limité à l'ordre 1 de l'équation différentielle du mouvement autour de $\theta_{eq} = \pi$. Mettre l'équation sous la forme : $\boxed{\ddot{\varepsilon} \pm \omega_1^2\, \varepsilon = 0}$, avec un signe $\oplus$ si $\beta < 1$ et $\ominus$ si $\beta > 1$, et où $\omega_1$ est une constante que l'on exprimera en fonction de $k$, $m$ et $\beta$.

16) Donner la forme générale de la solution lorsque $\beta > 1$.

--------------------------------------------------- Fin de la partie I ---------------------------------------------------

# II - Transformations thermodynamiques

Toutes les sous-parties sont indépendantes.

## II.1 - Transformation cyclique d'un gaz parfait

Une quantité de matière $n = 1{,}00$ mol de gaz parfait de coefficient $\gamma = 1{,}4$ subit le cycle de transformations suivant :

- De A à B, une détente isotherme très lente,
- De B à C, une transformation isochore,
- De C à A, le retour à l'état initial par une transformation isobare très lente.

<u>*Données*</u> : constante $R = 8{,}13\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$, $T_A = T_B = 293$ K, $V_A = 12{,}5$ L et $V_B = 50{,}0$ L

17) Représenter dans un diagramme de Clapeyron le cycle de transformations subies par le gaz.

18) Calculer les valeurs prises par les paramètres thermodynamiques $T_i$, $P_i$ et $V_i$ aux trois points $i =$ A, B et C. On regroupera les valeurs dans un tableau.

19) Calculer les valeurs du travail et du transfert thermique reçus par le gaz au cours de chaque étape du cycle : $W_{AB}$, $Q_{AB}$, $W_{BC}$, $Q_{BC}$, $W_{CA}$, $Q_{CA}$.

20) Calculer les valeurs du travail $W_{cycle}$ et du transfert thermique $Q_{cycle}$ reçus par le gaz au cours d'un cycle. Le cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.

21) Que vaut la variation d'énergie interne $\Delta U_{cycle}$ du gaz au cours d'un cycle ? Justifier.

## II.2 - Détente isotherme d'un mélange de deux corps purs

Un système fermé de volume $V$ variable subit une transformation isotherme très lente au contact d'un thermostat de température constante $T_0 = 333$ K. Le système est constitué d'un mélange de deux corps purs : diazote $N_2$ et eau $H_2O$.

<u>Hypothèses</u> :

- le diazote $N_2$ demeure à l'état gazeux ;
- la phase gaz, constituée de diazote et de vapeur d'eau, se comporte comme un mélange idéal de gaz parfaits ayant pour pression totale : $P_{tot} = P_{N_2} + P_{H_2O}$ où $P_{N_2}$ et $P_{H_2O}$ sont les pressions partielles de diazote et de vapeur d'eau ;
- le volume de la phase liquide (seulement composée d'eau) est négligé devant le volume de la phase vapeur.

<u>Données</u> :

- $P_{sat}(T_0 = 333\text{ K}) = 2,00 \times 10^4$ Pa : pression de vapeur saturante de l'eau à $T_0$ ;

### Corps pur eau (sans diazote)

Une quantité $n_E = 3,00.10^{-1}$ mol d'eau pure (sans diazote) est envisagée, à $T_0 = 333$ K, à l'état de vapeur saturante : état (0).

22) Donner la pression $P_{E,0}$ de l'eau correspondant à cet état d'équilibre.

23) En déduire la valeur numérique en litres du volume $V_0$ occupé par l'eau dans ces conditions.

24) Donner l'allure générale des diagrammes pression-température et de Clapeyron de l'eau. Positionner le point représentatif du corps pur, dans l'état (0), sur chacun des deux diagrammes.

Le volume du système est, depuis l'état (0), réduit de moitié ($V_{final} = V_0/2$) à température $T_0 = 333$ K constante et de manière très lente (équilibre entre le système et le milieu extérieur à tout instant).

25) Calculer la valeur du titre massique $x_{final}$ en vapeur d'eau à l'état final. Positionner le point représentatif du corps pur, dans cet état final, sur chacun des deux diagrammes de la question précédente.

26) Exprimer le travail $W$ reçu par le corps pur eau au cours de cette transformation en fonction de $P_{sat}(T_0)$ et $V_0$. Faire l'application numérique.

### Transformation d'un mélange diazote-eau

À la quantité $n_E = 3,00 \times 10^{-1}$ mol d'eau précédente est ajoutée la quantité $n_N = 1,00 \times 10^{-1}$ mol de diazote $N_2$. La pression totale initiale du mélange est $P_{tot,1} = 3,00 \times 10^4$ Pa, pour un nouveau volume $V_1$ : état (1).

27) Quelle inégalité devrait vérifier la pression partielle de l'eau si celle-ci était sous forme de vapeur sèche ? Montrer que, dans l'état (1), l'eau est sous forme de vapeur saturante (on pourra admettre ce résultat pour continuer l'exercice).

28) Déterminer la valeur de la pression partielle $P_{N_2,1}$ du diazote $N_2$ dans cet état initial.

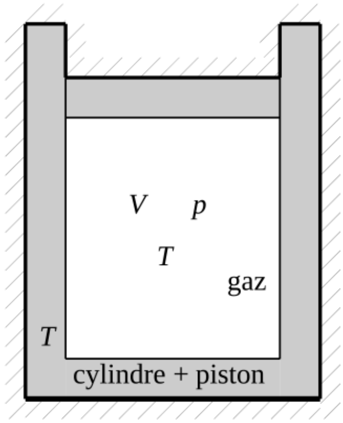
29) En déduire la valeur en litres du volume initial $V_1$ du mélange.

30) Calculer les valeurs des quantités de matière $n_{E,liq,1}$ et $n_{E,vap,1}$ de l'eau sous forme liquide et vapeur dans l'état (1).

Le mélange subit une détente isotherme et très lente (équilibre entre le système et le milieu extérieur à tout instant) jusqu'à l'état (2) pour lequel la pression totale est $P_{tot,2} = 2{,}00 \times 10^4$ Pa.

31) Déterminer si, dans l'état (2), l'eau est sous forme de vapeur sèche ou de vapeur saturante.

## II.3 - Transformation polytropique




Une quantité de matière $n = 1{,}00$ mol de gaz parfait de capacité thermique molaire à volume constant $C_{Vm}$ constante est contenue dans un cylindre fermé par un piston pouvant se déplacer sans frottement. Un opérateur déplace très lentement le piston de telle sorte que l'équilibre entre le gaz et le {cylindre + piston} soit vérifié à tout instant au cours de la transformation.

Les surfaces extérieures du cylindre et du piston sont parfaitement calorifugées. En revanche, on suppose parfait le contact thermique entre leurs surfaces intérieures et le gaz, de telle sorte que les températures du gaz, du cylindre et du piston restent toujours égales et notées $T$.

On se propose d'étudier l'influence de la capacité thermique $C$ de l'ensemble {cylindre + piston} sur les transformations du gaz.

On considère une transformation infinitésimale du système {gaz + cylindre + piston} lors de laquelle la température passe de $T$ à $T + dT$, la pression du gaz passe de $p$ à $p + dp$ et le volume du gaz passe de $V$ à $V + dV$.

32) Montrer, en justifiant, que : $(C + nC_{Vm})dT + pdV = 0$

33) En utilisant l'équation d'état du gaz parfait à l'état final, établir une relation au premier entre $p$, $V$, $dp$, $dV$, $dT$, $n$ et $R$.

34) En déduire la relation : $k\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$ où $k$ est une constante que l'on exprimera en fonction de $n$, $C$, $R$ et du coefficient γ du gaz.

35) Le système subit une transformation d'un état initial 1 $(p_1, T_1, V_1)$ vers un état final 2 $(p_2, T_2, V_2)$. Montrer, à partir du résultat précédent, que : $pV^k = cte$ (le produit de la pression par le volume puissance gamma est contant) tout au long de la transformation.

Une transformation pour laquelle cette relation est vérifiée est dite « polytropique de coefficient $k$ ». Puisque $pV^k = cte$ tout au long de la transformation, c'est en particulier vrai pour l'état initial (noté 1) et l'état final (noté 2).

36) Dans cette question, on suppose $C \to \infty$. Comment la constante $k$ se simplifie-t-elle ? Comment peut-on qualifier la transformation subie par le gaz ?

37) Dans cette question, on suppose $C \to 0$. Comment la constante $k$ se simplifie-t-elle ? Montrer alors que la transformation est adiabatique.

Dans la suite, on suppose que $k = 1{,}30$. On donne l'état initial ($p_1 = 1{,}00$ bar, $T_1 = 20{,}0\ °C$), la pression finale $p_2 = 10{,}0$ bar et le coefficient $\gamma = 1{,}4$ du gaz. Le système étudié est le gaz.

38) Calculer le volume $V_1$ du gaz dans l'état initial.

39) Établir l'expression de la température $T_2$ en fonction de $T_1$, $p_1$, $p_2$ et $k$. Faire l'application numérique. Calculer le volume $V_2$ du gaz dans l'état final.

40) Déterminer l'expression du travail reçu par le gaz lors de la transformation en fonction de $p_1$, $V_1$, $p_2$, $V_2$ et $k$. Faire l'application numérique.

41) En déduire l'expression du transfert thermique $Q$ reçu par le gaz en fonction de $p_1$, $V_1$, $p_2$, $V_2$, $k$ et γ. Faire l'application numérique.

--------------------------------------------------- Fin de la partie II ---------------------------------------------------